

**CHAPITRE 3 : INTERFERENCES DE N ONDES COHERENTES**

On s'intéresse maintenant à la superposition de N ondes lumineuses, d'abord sur le plan théorique puis dans une application pratique : le réseau de diffraction.

1- Superposition de N ondes lumineuses

On étudie les interférences de N ondes émises par N sources S_1, S_2, \dots, S_N quasi-monochromatiques de même pulsation ω et mutuellement cohérentes deux à deux. On suppose de plus qu'au point M où elles parviennent :

- les N ondes ont toutes la même amplitude s_0 ,
- la différence entre les retards de phase des ondes émises par deux sources consécutives S_{m+1} et

S_m est une constante : $\varphi_{m+1}(M) - \varphi_m(M) = \varphi$.

Remarque

On notera le déphasage φ plutôt que $\Delta\varphi$

1.1 Expression de la vibration lumineuse résultante

La vibration lumineuse rayonnée par la source S_m s'écrit au point M , en notation complexe :

$$\underline{s}_m(M, t) = s_0 \exp(j(\omega t - \varphi_m(M)))$$

On en déduit l'expression de $\underline{s}_{m+1}(M, t)$ en fonction de $\underline{s}_m(M, t)$:

$$\begin{aligned} \underline{s}_{m+1}(M, t) &= \underline{s}_m(M, t) \exp(j(\varphi_m(M, t) - \varphi_{m+1}(M, t))) \\ &= \underline{s}_m(M, t) \exp(-j\varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

L'équation (1) étant vraie quel que soit l'indice m on peut écrire :

$$s_m(M, t) = s_{m-1}(M, t) \exp(-j\varphi) = s_{m-2}(M, t) \exp(-2j\varphi) = \underline{s}_1(M, t) \exp(-j(m-1)\varphi).$$

La vibration lumineuse résultante au point M est :

$$\underline{s}(M, t) = \sum_{m=1}^N \underline{s}_m(M, t) = \sum_{m=1}^N \underline{s}_1(M, t) \exp(-j(m-1)\varphi)$$

Il s'agit de la somme d'une progression géométrique. On obtient :

$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= \underline{s}_1(M, t) \frac{1 - \exp(-jN\varphi)}{1 - \exp(-j\varphi)} \\ &= \underline{s}_1(M, t) \exp\left[-j \frac{(N-1)\varphi}{2}\right] \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \end{aligned}$$

1.2 Intensité vibratoire résultante

L'intensité vibratoire résultante au point M peut être calculée à partir de la vibration lumineuse résultante $s(M, t)$. On obtient le résultat suivant :

$$I(M) = \frac{1}{2} \underline{s}(M, t) \cdot \underline{s}^*(M, t) = I_{max} \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

où I_{max} représente l'intensité vibratoire maximale. Les figures 1, 2 et 3 donnent une représentation de I/I_{max} en fonction de φ .

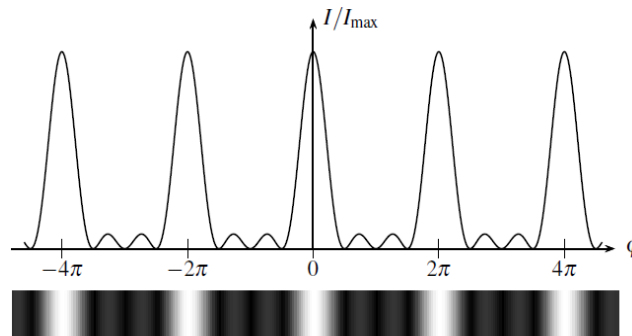


Figure 1: Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 4$

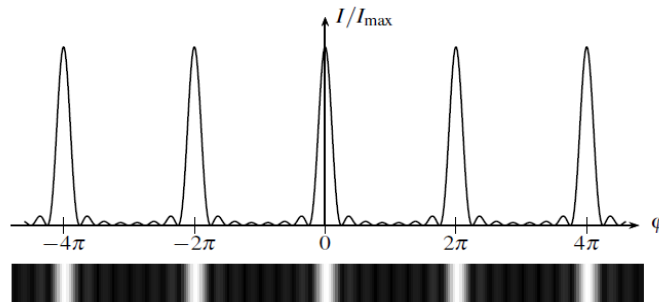


Figure 2: Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 8$

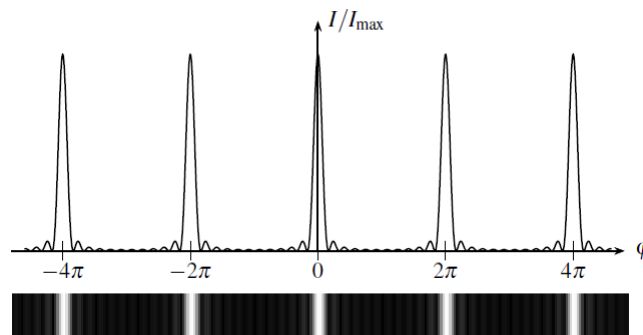


Figure 3: Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 12$

COMMENTAIRE DES TROIS FIGURES



La représentation de l'intensité vibratoire (figure 1 à 3) pour différentes valeurs de N appelle les commentaires suivants :

- la représentation de I fait apparaître une série de pics, au centre desquels I prend sa valeur maximale ;
- chacun de ces pics correspond à une frange brillante correspond à des interférences totalement constructives ($\varphi = 2k\pi$, avec k entier) ;
- on voit aussi apparaître des annulations de l'intensité vibratoire : ce sont les franges sombres qui correspondent aux interférences totalement destructives ;
- on voit aussi apparaître des franges secondaires, moins brillantes, correspondant à des interférences partiellement constructives. Mais ces franges secondaires deviennent de moins en moins visibles au fur et à mesure que N augmente ;

Remarque

I_{\max} est proportionnelle à N^2 , ce qui n'apparaît pas sur les figures précédentes, puisqu'on a représenté I/I_{\max} .

L'intensité vibratoire résultant de la superposition de N ondes cohérentes est maximale lorsque le déphasage entre deux ondes successives est : $\varphi = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Lorsque N est grand l'intensité est quasiment nulle en dehors des pics centrés autour de ces valeurs.

1.3 Maxima principaux d'intensité

Ces pics sont d'autant plus étroits que N est grand. On souhaite trouver leur largeur c'est-à-dire la différence entre les deux premières valeurs de j de part et d'autre de la valeur $2k\pi$ pour lesquelles l'intensité I s'annule. Or pour que I soit nulle il faut que :

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{N\varphi}{2} = q\pi \quad \varphi = \frac{2\pi q}{N} \quad \text{où } q \text{ est un relatif}$$

L'intensité est nulle pour les valeurs précédentes de φ si q n'est pas un multiple de N .

Si q est multiple de N on tombe sur les valeurs pour lesquelles I est maximale (dans ce cas le sinus du numérateur de l'expression de I

Ainsi, entre les deux maxima principaux repérés par $k = 0$ ($\varphi = 0$) et $k = 1$ ($\varphi = 2\pi$), on trouve $N - 1$ annulations de l'intensité vibratoire correspondant à $1 \leq q \leq N - 1$.

De même, de façon symétrique, entre les deux maxima principaux repérés par $k = 0$ ($\varphi = 0$) et $k = -1$ ($\varphi = -2\pi$), on trouve aussi $N - 1$ annulations de l'intensité vibratoire correspondant à $1 - N \leq q \leq -1$. On résume ces résultats sur la figure 4.

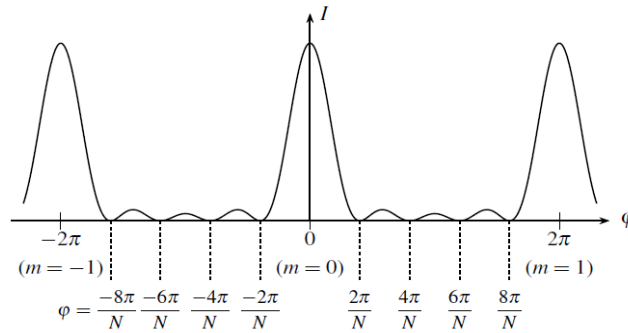


Figure 4: Maxima principaux et minima de l'intensité vibratoire $N = 5$

On définit la largeur $\delta\varphi$ d'un pic principal comme étant la variation de φ entre les deux annulations de l'intensité vibratoire qui bordent ce pic. Sur la figure 4, on lit directement : $\delta\varphi_N = \frac{4\pi}{N}$

Cette largeur est d'autant plus faible que N est élevée. Cela confirme l'observation qualitative faite sur les figures 1 à 3.

La finesse F_N d'un pic est définie comme étant le rapport : $F_N = \frac{2\pi}{\delta\varphi_N} = \frac{N}{2}$

On obtient que la finesse des pics croît avec N . Cette propriété importante est mise à profit pour faire de la spectroscopie, c'est-à-dire pour mesurer des longueurs d'onde

1.4 Interprétation à l'aide de la représentation de Fresnel

On peut trouver les résultats précédents par un raisonnement géométrique utilisant la **construction de Fresnel**.

Représentation de Fresnel d'une grandeur complexe :

Considérons une vibration lumineuse de la forme $\underline{s} = s_0 \exp(-j\theta)$,

que l'on peut aussi écrire sous la forme : $\underline{s} = s_0 \cos\theta - js_0 \sin\theta$.

On choisit de représenter cette grandeur complexe par un vecteur \vec{s} dans le plan (Oxy) défini par :

$$\vec{s} = \text{Re}(\underline{s})\vec{u}_x + \text{Im}(\underline{s})\vec{u}_y = s_0 \cos\theta \vec{u}_x - js_0 \sin\theta \vec{u}_y$$

Ce vecteur est appelé **vecteur de Fresnel**. Ce vecteur fait un angle $-\theta = \arg(\underline{s})$ avec le vecteur \vec{u}_x (figure 5)

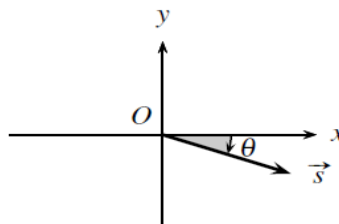


Figure 5: Représentation de Fresnel d'une grandeur complexe

Représentation de la vibration lumineuse résultante : En faisant l'addition vectorielle de ces N vecteurs, on obtient le vecteur de

Fresnel associé à la vibration lumineuse $s(M)$.

On représente ces vecteurs bout à bout en faisant une rotation de $-\varphi$ en passant d'un vecteur au vecteur suivant (figure 6)

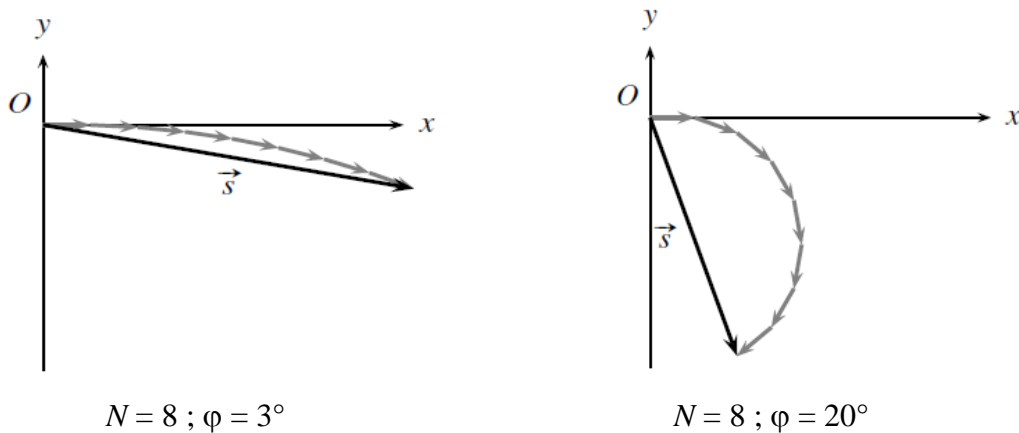


Figure 6: Construction de Fresnel de la vibration lumineuse résultante pour $N = 8$

Interférences totalement constructives : on obtient des interférences totalement constructives lorsque le vecteur \vec{s} a une norme maximale : cela correspond à la situation où $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Tous les vecteurs de Fresnel \vec{s}_m sont alors colinéaires et alignés selon l'axe (Ox) . Dans ce cas, l'intensité vibratoire $I(M)$ est maximale.

Interférences totalement destructives : on obtient des interférences totalement destructives lorsque le vecteur \vec{s} a une norme nulle : cela correspond à la situation où, en plaçant les vecteurs \vec{s}_m bout à bout, on effectue un nombre entier de tours figure 7

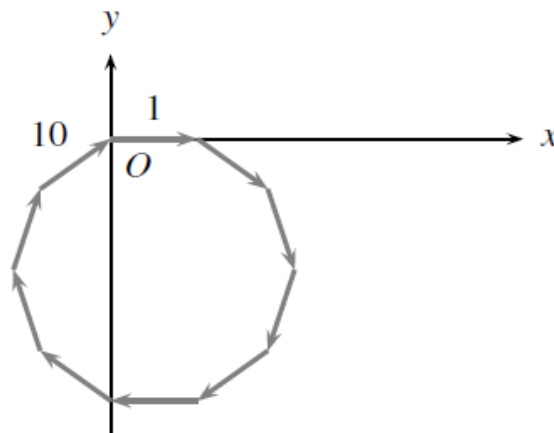


Figure 7: Construction de Fresnel correspondant à l'annulation de la vibration lumineuse résultante pour $N = 10$.

Dans cette situation, $N\varphi = 2q\pi$ où $q \in \mathbb{Z}$ avec q différent de zéro et de tout multiple de N , pour éviter de retomber sur la condition d'interférences totalement constructives où j est un multiple de 2π .

2 Réseaux de diffraction

2.1 Définition

Un **réseau de diffraction** est un objet plan présentant une structure périodique selon un axe (Ox) avec une période spatiale a de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde de la lumière visible qui est appelée **pas du réseau**.

Un réseau est constitué d'une suite de N motifs identiques. Ces motifs sont appelés **traits du réseau**.

En appelant (Oxy) le plan du réseau, les traits sont invariants par translation le long de l'axe (Oy) et décalés chaque fois de a suivant (Ox).

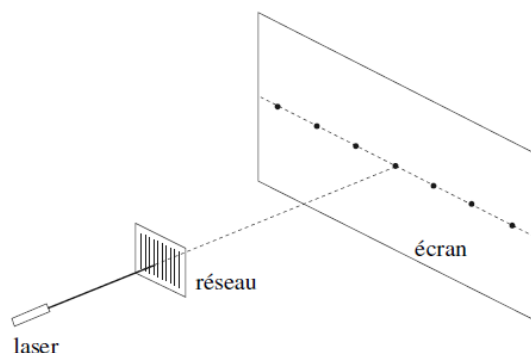
L'ordre de grandeur du pas a est de 1 à 10 μm . Le nombre N de motifs varie entre quelques centaines et quelques milliers : il est toujours très grand.

Réseaux par transmission : la lumière subit un phénomène de diffraction en traversant le réseau.

Il existe aussi des **réseaux par réflexion** fonctionnant de la même manière mis à part que la lumière diffractée est réfléchi.

2.2 Diffraction par un réseau

On éclaire un réseau par un faisceau laser approximativement orthogonal à son plan, l'observation se faisant sur un écran situé loin du réseau.



Sur l'écran, on observe une succession de petites taches lumineuses régulièrement espacées dont l'une est dans le prolongement du faisceau (c'est la tache centrale correspondant à la lumière non diffractée).

Si on translate le réseau dans son plan, la figure observée ne change pas. Si on remplace le réseau par un réseau de pas a plus grand, les taches sont plus resserrées, si on le remplace par un réseau de pas plus petit, elles sont plus espacées.

2.3 Formule fondamentale des réseaux

a) Principe du calcul

On interprète l'expérience précédente par les interférences entre les N ondes diffractées par les N motifs du réseau qui sont éclairés : les directions dans lesquels on trouve de la lumière diffractée sont celles pour lesquelles ces interférences sont constructives.

Pour les calculs on choisit un repère $(Oxyz)$ tel que (Oz) est la direction normale au plan du réseau et (Oy) est parallèle aux traits. Le réseau est éclairé par une onde plane monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , se propageant dans une direction perpendiculaire aux traits, c'est-à-dire parallèle au plan (Ozx) et faisant l'angle q_0 avec la normale au réseau (Oz) . Cette onde provient d'une source à l'infini S . La lumière diffractée par le réseau se propage *a priori* dans toutes les directions du plan (Ozx) ; on repère une direction quelconque de ce plan par l'angle q qu'elle fait avec (Oz) et on appelle M le point à l'infini dans cette direction (voir figure 9).

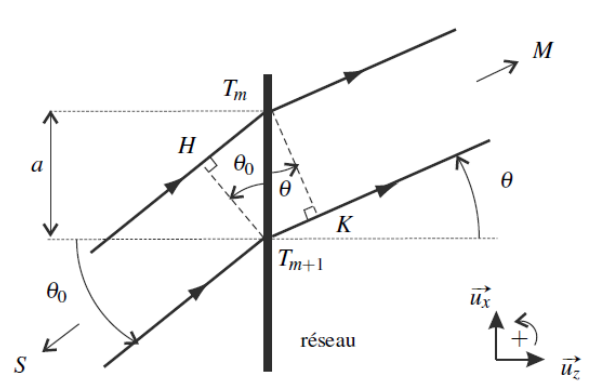
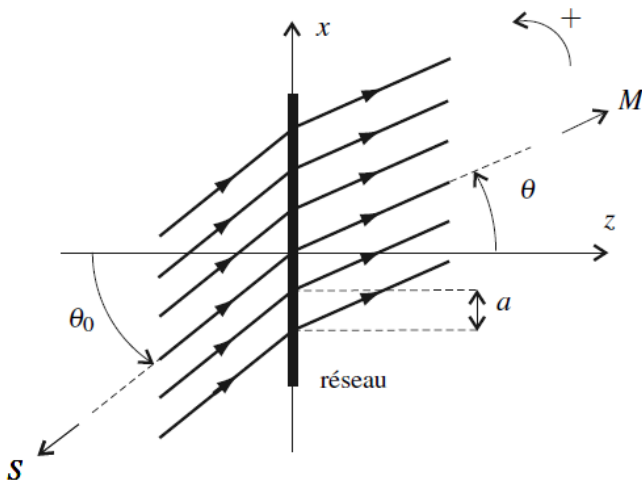


Figure 9: Diffraction par un réseau dans une direction q **Figure 10:** Calcul de la différence de marche

Soient T_1, T_2, \dots, T_N les centres des traits éclairés. On veut calculer la différence de marche en M entre les ondes diffractées par deux traits consécutifs de numéros m et $m+1$. Pour cela on fait apparaître les projections orthogonales H et K de T_{m+1} et T_m respectivement, sur les rayons ST_m et $T_{m+1}M$ respectivement. En utilisant le théorème de Malus, on a :

- T_{m+1} et H sont sur un même plan d'onde de l'onde plane arrivant sur le réseau, donc $(ST_{m+1}) = (SH)$;
- de manière analogue $(T_mM) = (KM)$. Cette égalité proviendrait de l'argument précédent si l'onde était issue de M et les rayons parcourus en sens inverse ; on dit que T_m et K sont sur un même *plan d'onde relatif au point M*.

Il vient :

$$\begin{aligned} d_{m+1/m}(M) &= (ST_{m+1}M) - (ST_mM) = (ST_{m+1}) - (ST_m) + (T_{m+1}M) - (T_mM), \\ &= -(HT_m) + (T_{m+1}K). \end{aligned}$$

D'après la figure 10 : $(HT_m) = n \sin q_0$ et $(T_{m+1}K) = n \sin q$.

La différence de marche est indépendante de m : on décide de ne plus mentionner cet indice. On obtient les expressions de la différence de marche $\delta(M)$, de la différence de phase $\Delta\varphi(M)$ et de l'ordre d'interférences $p(M)$ suivantes :

- **Différence de marche entre deux rayons consécutifs :**

$$\delta(M) = na (\sin\theta - \sin\theta_0)$$

- **Différence de phase entre deux rayons consécutifs :**

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi na}{\lambda_0} (\sin\theta - \sin\theta_0)$$

- **Ordre d'interférences :**

$$p(M) = \frac{na}{\lambda_0} (\sin\theta - \sin\theta_0)$$

c) Formule fondamentale des réseaux

Un réseau de pas a diffracte la lumière uniquement dans les directions q_k données par la **relation fondamentale des réseaux** :

$$\sin\theta_k - \sin\theta_0 = k \frac{\lambda_0}{na}$$

où k est un entier relatif appelé **ordre de diffraction**.

2.4 Principe du spectromètre à réseau

Le principe du **spectromètre à réseau** est illustré par l'expérience représentée sur la figure 11.

On réalise un collimateur, en plaçant une fente source dans le plan focal d'une lentille convergente (L_1), pour éclairer un réseau dont les traits sont parallèles à la fente. Celle-ci est éclairée par de la lumière blanche. Dans le plan focal d'une deuxième lentille convergente (L_2), on observe :

- au centre, l'image géométrique de la fente source qui est blanche ;
- de part et d'autre en s'éloignant du centre, des spectres correspondant aux ordres de diffraction $\pm 1, \pm 2$... dans lesquels le violet (v sur la figure) est le plus proche du centre et le rouge (r sur la figure) le plus éloigné du centre.

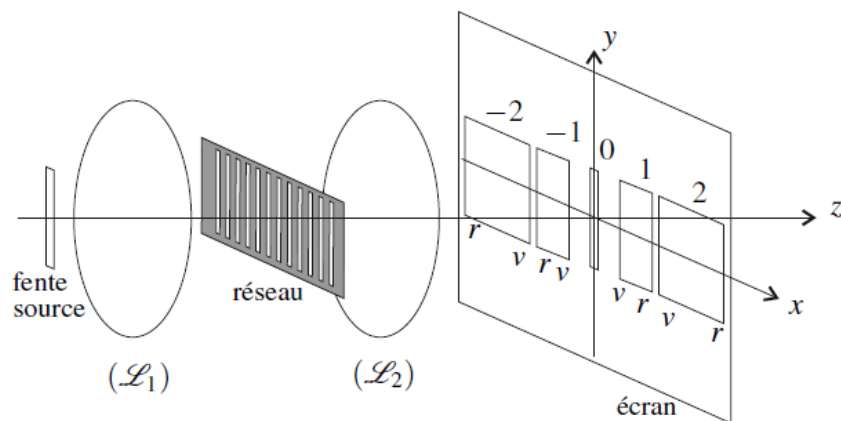


Figure 11: Expérience illustrant le principe du spectromètre à réseau



La lumière diffractée dans une direction q est recueillie sur l'écran au foyer image secondaire correspondant, dont la position x est reliée à q par la relation : $x = f_2 \tan q$,

f_2 étant la distance focale image de (L2). Dans les conditions de Gauss cette relation devient : $x \simeq f_2 q$.

Remarques

1. La disposition des couleurs dans le spectre est conforme à la formules des réseaux puisque q_k croît avec la longueur d'onde et que la lumière rouge a une longueur d'onde plus grande que la lumière violette.
2. À partir de l'ordre $k=2$ les spectres donnés par un réseau se recouvrent partiellement.